Wir betrachten uneigentliche Integrale der Form $F_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Wie man Integrale dieser Form vereinfachen kann, wurde bereits in Schritt 8 besprochen in ,,Begründung: Zu allen gebrochenrationalen Funktionen kann man eine Stammfunktion angeben, die aus den elementaren Funktionen zusammengesetzt ist.'' (wobei n > 1 vorausgesetzt wird):

$$F_n(x) = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx.$$

Das erste Integral ist nun genau $F_{n-1}(x)$, die Potenz wurde also um 1 kleiner. Das zweite Integral kann mittels partieller Integration ausgewertet werden (vergleiche Schritte 7 und 6 im oben erwähnten Dokument):

u(x) = x; u'(x) = 1; v(x) = $-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$; v'(x) = $\frac{2x}{(x^2+1)^n}$

➔ $\frac{1}{2}\int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx = -\frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} F_{n-1}(x)$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}F_{n-1}(x) = \frac{2n-2}{2n-2}F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}F_{n-1}(x),$$ also

$$\boxed{F_n(x) = \frac{2n-3}{2n-2}F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}}$$

Wenn man in dieser Formel das n durch n – 1 ersetzt, ergibt sich:

$$F_{n-1}(x) = \frac{2(n-1)-3}{2(n-1)-2}F_{(n-1)-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)-2}\frac{x}{(x^2+1)^{(n-1)-1}} = \frac{2n-5}{2n-4}F_{n-2}(x) + \frac{1}{2n-4}\frac{x}{(x^2+1)^{n-2}},$$

und wenn man das oben in der Formel für $F_n(x)$ einsetzt:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{2n-3}{2n-2}\left(\frac{2n-5}{2n-4}F_{n-2}(x) + \frac{1}{2n-4}\frac{x}{(x^2+1)^{n-2}}\right) + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}F_{n-2}(x) + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-2}} + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}F_{n-2}(x) + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-4}{(2n-2)(2n-4)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}F_{n-2}(x) + \frac{1}{(2n-2)(2n-4)}\frac{x[(2n-3)(x^2+1)+(2n-4)]}{(x^2+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

Das kann man nun weiter so fortsetzen, bis man bei $F_1(x)$ ankommt:

$$F_n(x) = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 2}F_1(x) + \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}\int \frac{1}{x^2+1} dx + \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\arctan(x) + g(x) =,$$

wobei der zweite Summand g(x) eine relativ komplizierte gebrochenrationale Funktion ist, bei welcher der Zähler x mal eine ganzrationale Funktion vom Grad 2n – 4 ist und der Nenner vom Grad 2n – 2; also ist g eine echt gebrochenrationale Funktion.

Damit folgt dann insbesondere:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n} dx &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\arctan(x) + \cdots\right]_0^b \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\left(\lim_{b\to\infty}\arctan(b) - \arctan(0) + \lim_{b\to\infty} g(b) - \frac{0\cdot\ldots}{\ldots}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \end{aligned}$$

Die Beiträge vom zweiten Summanden verschwinden: Für $b \to \infty$ geht er gegen Null, weil der Term g(b) echt gebrochenrational ist (s.o.), und für x = 0 ergibt sich Null, weil der Zähler einen Faktor x enthält (s.o.). Es bleibt also:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\frac{\pi}{2^n} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\frac{\pi}{2^{2n-1}}.}$$

Das kann man mittels der Substitution $x = a \cdot z$ auch einfach verallgemeinern zu

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{((az)^2+a^2)^n}\,d(az) = a \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\left(a^2(z^2+1)\right)^n}\,dz = a^{1-2n} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz = a^{1-2n} \cdot \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2^{2n-1}},$$

also

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{(2a)^{2n-1}}}.$$